物理数学 I　演習問題

第 3 章

1. ベクトル $\mathbf{A}(1,2,3)$、$\mathbf{B}(3,1,2)$、$\mathbf{C}(2,3,1)$、および $\mathbf{D}(3,2,1)$ のスカラー積 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}$ を求めなさい。

2. 問題 1 のベクトルのベクトル積を求めなさい。ベクトル積の結果を図で表しなさい。
（1） $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$　（2） $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　（3） $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　（4） $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$　（5） $\mathbf{A}\times\mathbf{D}$　（6） $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

3. 問題 1 のベクトルで張られる平行四辺形の面積を求めなさい。面に立てた法線ベクトルを図次しなさい。
（1） $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$　（2） $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$　（3） $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$

4. 次のベクトルで張られる立体の体積を求めなさい。
（1） $\mathbf{E}(1,0,0)$、$\mathbf{F}(0,1,0)$、および $\mathbf{G}(0,0,1)$　（2） $\mathbf{A}(1,2,3)$、$\mathbf{B}(3,1,2)$、および $\mathbf{C}(2,3,1)$

5. 次のベクトルの間の角度をスカラー積とベクトル積を用いて求めなさい。
（1） $\mathbf{A}(1,2,3)$ と $\mathbf{B}(3,1,2)$　（2） $\mathbf{B}(3,1,2)$ と $\mathbf{C}(2,3,1)$　（3） $\mathbf{C}(2,3,1)$ と $\mathbf{D}(3,2,1)$

6. 三次元空間に張られる結晶格子を考える。結晶格子の単位胞（結晶格子の最小単位空間）の三つの辺をベクトル $\mathbf{A}(a_x,a_y,a_z)$、$\mathbf{B}(b_x,b_y,b_z)$ および $C(c_x,c_y,c_z)$ とする。この単位胞の側面の面ベクトル（単位胞の外側を向く方向で）を求めなさい。この単位胞の体積を求めなさい。
$\mathbf{A}^* = \dfrac{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}$、$\mathbf{B}^* = \dfrac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}$、$\mathbf{C}^* = \dfrac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}$　を成分で表しなさい。これ等を逆格子ベクトルという。ベクトルの方向と長さなどの幾何学的な意味を考えなさい。
更に、次の関係を示しなさい。ベクトルの成分を使わなくても証明できます。
$\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{C} = 1$　および　$\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}^*\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{A} = \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{B} = 0$

7. 次の位置ベクトルを時間 t で微分して速度ベクトルを求め、成分表示しなさい。これ等はどのような運動か説明しなさい。
（1） $\mathbf{r}(x,y,z) = (r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t, 0)$　（2） $\mathbf{r}(x,y,z) = (r_0\cos\omega t^2, r_0\sin\omega t^2, 0)$
（3） $\mathbf{r}(x,y,z) = (r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t, v_0 t)$　（4） $\mathbf{r}(x,y,z) = (at\cos\omega t, at\sin\omega t, 0)$
（5） $\mathbf{r}(x,y,z) = (ae^{bt}\cos\omega t, ae^{bt}\sin\omega t, 0)$　（6） $\mathbf{r}(x,y,z) = \left(r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t, \dfrac{1}{2}gt^2\right)$

（6） $\mathbf{r}(x,y,z)=(at\cos\omega t, at\sin\omega t, v_0 t)$

8. 問題 7 の各運動の加速度ベクトルを求め、成分表示しなさい。角速度ベクトルはどの方向を向いていて、大きさはどう変化するか。

9. 質量が m の質点が問題 7 の運動をする。各運動における角運動量ベクトルを成分で与えなさい。角運動量ベクトルが時間的に変化するものと変化しないものとに分けなさい。

10. 問題 7 の運動で、運動エネルギーを求めなさい。時間的に変化するものと変化しないものとに分類しなさい。

11. 次の各曲線の曲率半径を x の関数として与えなさい。

（1） $y=x^3$　（2） $y=x^4$　（3） $y=a\sin x$　（4） $y=e^x$　（5） $y=\dfrac{1}{x}$

（6） $y=e^{x^2}$　（7） $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　（8） $y=\dfrac{x}{x^2+1}$